

# Ejercicio resuelto de análisis de decisiones

Francisco Javier Díez. UNED

23-12-2017. Revisado: 9-1-2018

Este documento contiene un ejemplo de análisis de decisiones, propuesto como material complementario del libro *Introducción a los Modelos Gráficos Probabilistas* [2], que se encuentra disponible de forma gratuita en internet. El problema planteado se resuelve mediante la construcción de un diagrama de influencia [3], que se evalúa con dos de los algoritmos explicados en ese libro: eliminación de variables con división de potenciales [5, 6] e inversión de arcos [7, 8]. La página [www.ia.uned.es/~fjdiez/libros/intro-mgp.html](http://www.ia.uned.es/~fjdiez/libros/intro-mgp.html) ofrece, junto a este documento, varios archivos complementarios: el diagrama de influencia `DI-ejercicio-resuelto.pgm`, que puede abrirse con el programa OpenMarkov; la hoja de cálculo `ejercicio-resuelto.xlsx`, con la que hemos realizado los cálculos, y la red bayesiana `RB-ejercicio-resuelto.pgm`, que utilizaremos para comprobar que las probabilidades condicionadas obtenidas son correctas.

## Enunciado

Una empresa de fabricación sospecha, con una probabilidad del 2 %, que un intruso ha entrado en su red informática con el fin de sabotear su producción. Si no le detienen a tiempo, puede provocar daños por valor de 40.000 €. Examinado el registro de actividad («log») se puede saber si hay realmente un intruso, con una sensibilidad del 90 %, una especificidad del 94 % y un coste prácticamente nulo. Se puede realizar un análisis más fiable (99'5 % de sensibilidad y 99'8 % de especificidad), pero ello implica tener parada la red durante 15 minutos, lo cual conlleva un coste de 1.500 €. Tanto si se hace esta prueba como si no, la empresa debe decidir si realiza una revisión a fondo del sistema informático, lo cual implica detener la producción durante una hora, con un coste de 5.000 €.

¿Qué debe hacer la empresa?

## Construcción del modelo

En este problema hay dos decisiones: realizar el análisis de 15 minutos ( $D$ ) y revisar a fondo el sistema ( $R$ ). Podríamos añadir una tercera decisión, la de consultar el «log» o no, pero como el coste es casi nulo, lo vamos a consultar siempre, y por tanto no es necesario representar esta decisión en el modelo. Incluimos tres variables de azar: la primera,  $I$ , con dos valores, para indicar si ha habido un intruso o no; la segunda,  $L$ , para indicar si el «log» es positivo o negativo, y la tercera,  $A$ , para indicar el resultado del análisis; además de los valores  $+a$  (positivo) y  $-a$  (negativo) hay que añadir un tercer valor, que denotaremos como  $a_0$  (test no realizado), porque cuando no se hace el análisis ( $D = \neg d$ )  $A$  no puede ser «positivo» ni «negativo».<sup>1</sup>

Incluimos estas tres variables en el grafo del diagrama, como puede verse en la figura 1. Los enlaces  $I \rightarrow L$  e  $I \rightarrow A$  indican que el resultado de cada prueba depende causalmente de si ha habido un intruso. La ausencia de un enlace entre  $L$  y  $A$  se debe a que suponemos que no hay relación causal entre ambas pruebas, y por tanto estas variables son condicionalmente independientes dada  $I$ .

---

<sup>1</sup>El error más típico de los principiantes es utilizar la misma variable para indicar la decisión de realizar un test y el resultado del test, en vez de usar dos variables. Suelen incluirla como nodo de azar, con valores «positivo» y «negativo», asignando al primero el coste de la prueba. Naturalmente, esto es un error, entre otros motivos porque la prueba tiene el mismo coste cuando da negativo que cuando da positivo, y porque el modelo, al no contener el nodo de decisión correspondiente, no puede hallar la política óptima para esta decisión.

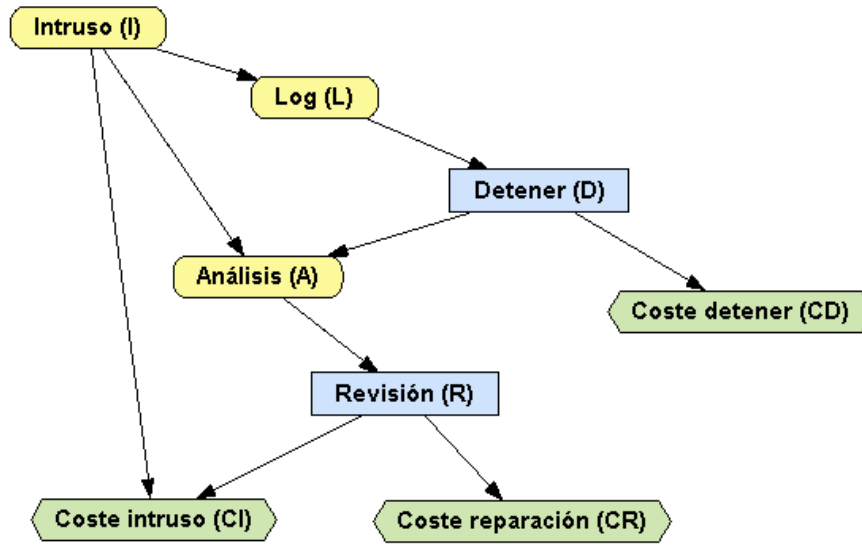


Figura 1: Diagrama de influencia.

Por último añadimos tres nodos de utilidad para representar los tres costes indicados en el enunciado. (Podríamos haber representado los tres valores con un único nodo, pero es mejor mantenerlos separados.)

Tras completar la fase cualitativa o estructural de la construcción del modelo, pasamos a la fase numérica. Las tablas de probabilidad son:

|         |      |
|---------|------|
| $P(+i)$ | 0'02 |
| $P(-i)$ | 0'98 |

|             |      |      |
|-------------|------|------|
| $I$         | $-i$ | $+i$ |
| $P(+l   i)$ | 0'06 | 0'90 |
| $P(-l   i)$ | 0'94 | 0'10 |

|                 |      |      |       |       |
|-----------------|------|------|-------|-------|
| $D$             | $-d$ | $-d$ | $+d$  | $+d$  |
| $I$             | $-i$ | $+i$ | $-i$  | $+i$  |
| $P(+a   d, i)$  | 0    | 0    | 0'002 | 0'995 |
| $P(-a   d, i)$  | 0    | 0    | 0'998 | 0'005 |
| $P(a_0   d, i)$ | 1    | 1    | 0     | 0     |

Y las de utilidad son:

|             |      |        |
|-------------|------|--------|
| $D$         | $-d$ | $+d$   |
| $u_{CD}(d)$ | 0    | -1.500 |

|             |      |        |
|-------------|------|--------|
| $R$         | $-r$ | $+r$   |
| $u_{CD}(r)$ | 0    | -5.000 |

|                |      |      |         |      |
|----------------|------|------|---------|------|
| $I$            | $-i$ | $-i$ | $+i$    | $+i$ |
| $R$            | $-r$ | $+r$ | $-r$    | $+r$ |
| $u_{CI}(i, r)$ | 0    | 0    | -40,000 | 0    |

## Evaluación mediante eliminación de variables

Antes de empezar a hacer cálculos es necesario determinar el orden de eliminación de las variables. Existen dos decisiones, con un camino dirigido desde  $D$  hasta  $R$  en el grafo, lo cual nos indica que  $D$  es la primera decisión. El enlace  $L \rightarrow D$  implica que  $L$  es un predecesor informativo de  $D$ , del mismo modo que  $A$  lo es de  $R$ . Del nodo  $I$  no parte ningún enlace hacia ninguna decisión y por tanto el valor de esta variable nunca es conocido. De ahí se deduce que la utilidad esperada es

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a \max_r \sum_i P(i) \cdot P(l | i) \cdot P(a | i, d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CR}(r) + u_{CI}(i, r)] \quad (1)$$

y por tanto las variables se han de eliminar en el orden  $I-R-A-D-L$ .

### Paso 1. Eliminación de la variable de azar $I$

Esta variable aparece en tres potenciales de probabilidad y en uno de utilidad. Con los tres primeros calculamos la probabilidad conjunta,

$$P(i, l, a | d) = P(i) \cdot P(l | i) \cdot P(a | i, d),$$

| $L$                        | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$   | $+l$     | $+l$    |
|----------------------------|----------|----------|----------|--------|----------|---------|
| $A$                        | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     | $a_0$  | $\neg a$ | $+a$    |
| $P(+i, l, a   +d)$         | 0        | 0'00009  | 0'01791  | 0      | 0'00001  | 0'00199 |
| $P(\neg i, l, a   +d)$     | 0        | 0'05868  | 0'00012  | 0      | 0'91936  | 0'00184 |
| $P(+i, l, a   \neg d)$     | 0'018    | 0        | 0        | 0'002  | 0        | 0       |
| $P(\neg i, l, a   \neg d)$ | 0'0588   | 0        | 0        | 0'9212 | 0        | 0       |

luego la probabilidad marginal,

$$P(l, a | d) = \sum_i P(i, l, a | d), \quad (2)$$

| $L$                | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$   | $+l$     | $+l$    |
|--------------------|----------|----------|----------|--------|----------|---------|
| $A$                | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     | $a_0$  | $\neg a$ | $+a$    |
| $P(l, a   +d)$     | 0        | 0'05878  | 0'01803  | 0      | 0'91937  | 0'00383 |
| $P(l, a   \neg d)$ | 0'0768   | 0        | 0        | 0'9232 | 0        | 0       |

y después la condicionada,

$$P(i | l, a, d) = P(i, l, a | d) / P(l, a | d). \quad (3)$$

| $L$                        | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$    | $+l$     | $+l$    |
|----------------------------|----------|----------|----------|---------|----------|---------|
| $A$                        | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     | $a_0$   | $\neg a$ | $+a$    |
| $P(+i   l, a, +d)$         | 0        | 0'00153  | 0'99348  | 0       | 0'00001  | 0'51926 |
| $P(\neg i   l, a, +d)$     | 0        | 0'99847  | 0'00652  | 0       | 0'99999  | 0'48074 |
| $P(+i   l, a, \neg d)$     | 0'23438  | 0        | 0        | 0'00217 | 0        | 0       |
| $P(\neg i   l, a, \neg d)$ | 0'76563  | 0        | 0        | 0'99783 | 0        | 0       |

Podemos comprobar que los valores de esta última tabla son correctos abriendo en OpenMarkov la red bayesiana RB-ejercicio-resuelto.pgm e introduciendo evidencia como se explica en el tutorial. Cuando sólo tenemos información sobre  $L$ , porque no hemos hecho el análisis  $A$ ,  $P(+i | +l) = 0'23438$ . Cuando tanto el «log» como el análisis son positivos tenemos  $P(+i | +l, +a) = 0'51926$ . Y del mismo modo podemos comprobar los demás valores.

Observe que en algunos casos  $P(i, l, a | d)$  y  $P(l, a | d)$  valen 0, lo cual hace que la ecuación 3 dé una indeterminación. Nosotros la hemos resuelto haciendo  $P(i | l, a, d) = 0$  en esos casos (vea

las casillas J14:J37 del archivo Excel adjunto). En realidad podríamos haber puesto cualquier otro valor,  $k$ , en vez de 0. Ese cambio en el valor de  $P(i|l, a, d)$  provocaría un cambio en algunos valores de la tabla  $u_{CI}(l, a, d, r)$ , que vamos a obtener enseguida con la ecuación 4; pero al calcular la utilidad esperada —cf. ecuación 5— esos valores se van a multiplicar por  $P(l, a | d)$ , que vale 0, de modo que el valor elegido para  $k$  es totalmente irrelevante. Puede comprobarlo modificando la fórmula utilizada en las casillas de Excel ya mencionadas.

Nos ocupamos ahora del único potencial de utilidad que depende de  $I$ ,  $u_{CI}(i, r)$ . Al combinarlo con la probabilidad condicionada de  $I$  obtenemos

$$u_{CI}(l, a, d, r) = \sum_i P(i | l, a, d) \cdot u_{CI}(i, r) , \quad (4)$$

| $L$                        | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$   | $+l$      | $+l$     | $+l$       |
|----------------------------|----------|----------|------------|-----------|----------|------------|
| $A$                        | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$       | $a_0$     | $\neg a$ | $+a$       |
| $u_{CI}(l, a, +d, +r)$     | 0        | 0        | 0          | 0         | 0        | 0          |
| $u_{CI}(l, a, -d, +r)$     | 0        | 0        | 0          | 0         | 0        | 0          |
| $u_{CI}(l, a, +d, \neg r)$ | 0        | -0'44    | -20.770'27 | 0         | -61'25   | -39.739'07 |
| $u_{CI}(l, a, -d, \neg r)$ | -86,66   | 0        | 0          | -9.375'00 | 0        | 0          |

de modo que la utilidad esperada es

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a \max_r P(l, a | d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CR}(r) + u_{CI}(l, a, d, r)] . \quad (5)$$

## Paso 2. Eliminación de la decisión $R$

Observamos que no hay ningún potencial de probabilidad que dependa de esta variable. En cambio hay dos potenciales de utilidad, que debemos sumar:

$$u_{CIR}(l, a, d, r) = u_{CR}(r) + u_{CI}(l, a, d, r) . \quad (6)$$

| $L$                         | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$   | $+l$      | $+l$     | $+l$       |
|-----------------------------|----------|----------|------------|-----------|----------|------------|
| $A$                         | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$       | $a_0$     | $\neg a$ | $+a$       |
| $u_{CIR}(l, a, +d, +r)$     | -5.000   | -5.000   | -5.000     | -5.000    | -5.000   | -5.000     |
| $u_{CIR}(l, a, -d, +r)$     | -5.000   | -5.000   | -5.000     | -5.000    | -5.000   | -5.000     |
| $u_{CIR}(l, a, +d, \neg r)$ | 0        | -0'44    | -20.770'27 | 0         | -61'25   | -39.739'07 |
| $u_{CIR}(l, a, -d, \neg r)$ | -86,66   | 0        | 0          | -9.375'00 | 0        | 0          |

El potencial  $u_{CIR}(l, a, d)$ , que ya no depende de  $R$ , se obtiene maximizando para esta variable:

$$u_{CIR}(l, a, d) = \max_r u_{CIR}(l, a, d, r) . \quad (7)$$

| $L$                 | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$  | $+l$      | $+l$     | $+l$      |
|---------------------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
| $A$                 | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$      | $a_0$     | $\neg a$ | $+a$      |
| $u_{CIR}(l, a, +d)$ | 0        | -0'44    | -5.000'00 | 0         | -61'25   | -5.000'00 |
| $u_{CIR}(l, a, -d)$ | -86'66   | 0        | 0         | -5.000'00 | 0        | 0         |

Al maximizar obtenemos también la política óptima para  $R$ :

$$R_{opt}(l, a, d) = \arg \max_r u_{CIR}(l, a, d, r) . \quad (8)$$

| $L$                 | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$     | $+l$     | $+l$     |
|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $A$                 | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     |
| $R_{opt}(l, a, +d)$ | $\neg r$ | $\neg r$ | $+r$     | $\neg r$ | $\neg r$ | $+r$     |
| $R_{opt}(l, a, -d)$ | $\neg r$ | $\neg r$ | $\neg r$ | $+r$     | $\neg r$ | $\neg r$ |

Ahora la utilidad esperada es

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a P(l, a | d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CIR}(l, a, d)]. \quad (9)$$

Podemos comprobar que la tabla  $u_{CIR}(l, a, d, r)$  que hemos obtenido es correcta abriendo en OpenMarkov el diagrama de influencia `DI-ejemplo-resuelto.pgm`, pasando a modo inferencia y eligiendo la opción `Mostrar utilidad esperada` para el nodo  $R$ ; el tutorial de OpenMarkov explica con más detalle cómo hacerlo. Sin embargo, los resultados que obtenemos no coinciden con los de la tabla  $u_{CIR}(l, a, d)$  que acabamos de calcular. ¿Por qué? La diferencia se debe a que OpenMarkov está mostrando la utilidad total,  $u(l, a, d, r)$ , que es la suma de  $u_{CR}(r)$  y  $u_{CI}(l, a, d, r)$ . Para que las tablas coincidan es necesario borrar temporalmente el nodo  $CR$ , que lleva asociado el potencial  $u_{CR}(r)$ . Si ahora seleccionamos la opción `Mostrar utilidad esperada` veremos que la tabla de OpenMarkov coincide con  $u_{CIR}(l, a, d, r)$ ; las celdas coloreadas en verde indican el valor de  $R$  que maximiza la utilidad esperada, es decir,  $R_{opt}(l, a, d)$ . También podemos comprobar que la tabla  $R_{opt}(l, a, d)$  es correcta con la opción `Mostrar política óptima` para el nodo  $R$ . (Después de hacer estas comprobaciones cierre el diagrama de influencia sin guardar los cambios, para no perder definitivamente el nodo  $CR$ .)

### Paso 3. Eliminación de la variable de azar $A$

Los potenciales que dependen de esta variable son  $P(l, a | d)$  y  $u_{CIR}(l, a, d)$ . Primero calculamos la probabilidad marginal,

$$P(l | d) = \sum_a P(l, a | d), \quad (10)$$

| $D$         | $\neg d$ | $+d$   |
|-------------|----------|--------|
| $P(+l   d)$ | 0'0768   | 0'0768 |
| $P(-l   d)$ | 0'9232   | 0'9232 |

y luego la condicionada,

$$P(a | l, d) = P(l, a | d) / P(l | d), \quad (11)$$

| $D$             | $\neg d$ | $+d$     | $\neg d$ | $+d$    |
|-----------------|----------|----------|----------|---------|
| $L$             | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$     | $+l$    |
| $P(+a   d, i)$  | 0        | 0        | 0'00415  | 0'23473 |
| $P(-a   d, i)$  | 0        | 0        | 0'99585  | 0'76527 |
| $P(a_0   d, i)$ | 1        | 1        | 0        | 0       |

lo cual nos permite convertir  $u_{CIR}(l, a, d)$  en  $u_{CIR}(l, d)$ :

$$u_{CIR}(l, d) = \sum_a P(a | l, d) \cdot u_{CIR}(l, a, d), \quad (12)$$

| $D$             | $\neg d$ | $+d$      | $\neg d$ | $+d$      |
|-----------------|----------|-----------|----------|-----------|
| $L$             | $\neg l$ | $\neg l$  | $+l$     | $+l$      |
| $u_{CIR}(l, d)$ | -86'66   | -5.000'00 | -21'19   | -2.720'55 |

de modo que

$$UE = \sum_l \max_d P(l | d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CIR}(l, d)]. \quad (13)$$

De nuevo podemos usar OpenMarkov para comprobar que estamos haciendo bien los cálculos. Al compilar el diagrama de influencia e introducir la evidencia  $L = +l$  vemos que la probabilidad de  $A = +a$  es 0'23473. Ahora intentamos comprobar que cuando  $L = \neg l$  la probabilidad de  $A = \neg a$  es 0'00415, pero OpenMarkov nos da un mensaje de error, diciendo que la evidencia es incompatible, porque, como veremos enseguida, cuando el «log» es negativo la decisión óptima es no hacer el análisis ( $D = \neg d$ ) y por tanto  $A = a_0$ . Una solución posible sería imponer una política no óptima para  $D$ , como explica el tutorial de OpenMarkov. Una opción más sencilla es utilizar la red bayesiana RB-ejercicio-resuelto.pgm, como en el paso 1.

#### Paso 4. Eliminación de la decisión $D$

Los potenciales que dependen de ella, al menos aparentemente, son  $P(l | d)$ ,  $u_{CD}(d)$  y  $u_{CIR}(l, a, d)$ . Sin embargo, la teoría nos dice que  $P(l | d)$  no puede depender de  $D$  [2, 6] y, efectivamente, en la tabla que aparece a continuación de la ecuación 10 comprobamos que  $P(+l | +d) = P(+l | \neg d) = 0'0768$  y  $P(\neg l | +d) = P(\neg l | \neg d) = 0'9232$ . Por tanto, podemos obtener  $P(l)$  por proyección, es decir, escogiendo arbitrariamente un valor de  $D$ :

$$P(l) = \text{proy}_d P(l | d) . \quad (14)$$

|             |        |
|-------------|--------|
| $P(+l)$     | 0'0768 |
| $P(\neg l)$ | 0'9232 |

A continuación sumamos los potenciales de utilidad que dependen de  $D$ ,

$$u_{CIDR}(l, d) = u_{CD}(d) + u_{CIR}(l, d) , \quad (15)$$

|                  |          |           |           |           |
|------------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| $D$              | $\neg d$ | $+d$      | $\neg d$  | $+d$      |
| $L$              | $\neg l$ | $\neg l$  | $+l$      | $+l$      |
| $u_{CIDR}(l, d)$ | -86'66   | -5.000'00 | -1.521'19 | -2.720'55 |

y maximizamos,

$$u_{CIDR}(l) = \max_d u_{CIDR}(l, d) , \quad (16)$$

|                    |           |
|--------------------|-----------|
| $u_{CIDR}(+l)$     | -2.720'55 |
| $u_{CIDR}(\neg l)$ | -86'66    |

con lo cual obtenemos la política óptima para  $D$ :

$$D_{opt}(l) = \arg \max_d u_{CIDR}(l, d) . \quad (17)$$

|                   |          |
|-------------------|----------|
| $D_{opt}(+l)$     | $+d$     |
| $D_{opt}(\neg l)$ | $\neg d$ |

Pasando a modo inferencia en OpenMarkov podemos comprobar que la tabla  $P(l)$  que hemos calculado es correcta. Las tablas  $u_{CIDR}(l, d)$ ,  $u_{CIDR}(l)$  y  $D_{opt}(l)$  pueden comprobarse con las opciones Mostrar utilidad esperada y Mostrar política óptima del nodo  $D$ , como hicimos en el paso 2 para  $R$ .

## Paso 5. Eliminación de la variable de azar $L$

Finalmente, eliminamos  $L$ , con lo cual obtenemos la utilidad esperada:

$$UE = \sum_l P(l) \cdot u_{CIDR}(l) = -288,94 . \quad (18)$$

En este problema  $UE$  es negativa porque nuestro punto de referencia ( $U = 0$ ) ha sido el caso en que no había intruso ( $I = \neg i$ ) y no se tomaba ninguna medida ( $D = \neg d$ ,  $R = \neg r$ ). Ésta es la situación óptima. Por tanto cualquier otra situación —en particular, aquélla en que hay sospecha de intruso— tiene una utilidad negativa.

## Paso 6. Estrategia óptima

La estrategia óptima es la siguiente: cuando el «log» es negativo ( $L = \neg l$ ), no conviene realizar el análisis que requiere desconectar la red durante 15 minutos, ya que  $D_{opt}(\neg l) = \neg d$ . Obviamente, al no realizar este análisis no se obtiene ningún resultado (pues  $P(a_0|\neg d) = 1$ ) y lo mejor es no hacer la revisión a fondo ( $R_{opt}(\neg l, \neg d, a_0) = \neg r$ ).

Cuando el «log» es positivo conviene hacer el análisis ( $D_{opt}(+l) = +d$ ). En este caso la prueba puede dar positivo ( $P(+a|+l,+d) = 0'23\%$ ) o negativo ( $P(-a|+l,+d) = 0'77\%$ ). Si da positivo, es mejor hacer la revisión ( $D_{opt}(+l,+d,+a) = +r$ ), mientras que si da negativo es mejor no hacerla ( $D_{opt}(+l,+d,-a) = \neg r$ ).

Esta estrategia puede verse en OpenMarkov pulsando el botón S.

## Evaluación mediante inversión de arcos

En este algoritmo tenemos que eliminar primero las variables que no son predecesores informativos de ninguna decisión. En este caso la única variable que cumple esta condición es  $I$ . Como esta variable no es un sumidero, porque tiene dos hijos que son variables de azar, debemos invertir los arcos que salen de ella, hasta convertirla en sumidero. Los dos enlaces son  $I \rightarrow L$  e  $I \rightarrow A$ . Si invirtiéramos el segundo se crearía un ciclo en el grafo. Por tanto la única posibilidad es invertir primero el enlace  $I \rightarrow L$ .

### Paso 1. Inversión del enlace $I \rightarrow L$

Dado que ninguno de estos dos nodos tiene otros padres, no hace falta trazar enlaces adicionales. Primero calculamos la probabilidad conjunta:

$$P(i, l) = P(i) \cdot P(l | i) .$$

| $L$        | $\neg l$ | $+l$   |
|------------|----------|--------|
| $P(+i, l)$ | 0'002    | 0'018  |
| $P(-i, l)$ | 0'9212   | 0'0588 |

La probabilidad del nodo  $L$  en el nuevo diagrama de influencia es

$$P(l) = \sum_i P(i, l)$$

|         |        |
|---------|--------|
| $P(+l)$ | 0'0768 |
| $P(-l)$ | 0'9232 |

y la probabilidad de  $I$  es:

$$P(i | l) = \sum_i P(i, l) / P(l) .$$

| $L$             | $\neg l$ | $+l$   |
|-----------------|----------|--------|
| $P(+i   l)$     | 0'0022   | 0'2344 |
| $P(\neg i   l)$ | 0'9978   | 0'7656 |

Según este diagrama, la utilidad esperada es

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a \max_r \sum_i P(l) \cdot P(i | l) \cdot P(a | i, d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CR}(r) + u_{CI}(i, r)], \quad (19)$$

que sólo se diferencia de la expresión original (ecuación 1) en que aparece el producto  $P(l) \cdot P(i | l)$  en vez de  $P(i) \cdot P(l | i)$  como consecuencia de haber invertido el enlace  $I \rightarrow L$ .

## Paso 2. Inversión del enlace $I \rightarrow A$

Lo primero que debemos hacer es compartir los padres. Como ahora  $I$  tiene un padre,  $L$ , añadimos el enlace  $L \rightarrow A$ . Y como  $A$  tiene un padre,  $D$ , añadimos el enlace  $D \rightarrow I$ . El grafo resultante se muestra en la figura 2.

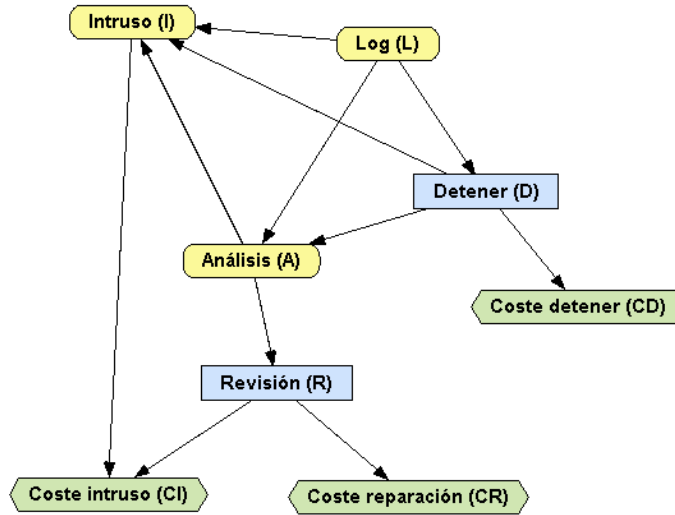


Figura 2: Diagrama de influencia obtenido al convertir el nodo  $I$  en sumidero, es decir, al invertir los enlaces  $I \rightarrow L$  e  $I \rightarrow A$ .

La probabilidad conjunta es

$$P(i, a | l, d) = P(i | l) \cdot P(a | i, d).$$

| $L$                        | $\neg l$ | $\neg l$ | $\neg l$ | $+l$    | $+l$     | $+l$    |
|----------------------------|----------|----------|----------|---------|----------|---------|
| $A$                        | $a_0$    | $\neg a$ | $+a$     | $a_0$   | $\neg a$ | $+a$    |
| $P(+i, a   l, +d)$         | 0        | 0'00001  | 0'00216  | 0       | 0'00117  | 0'23320 |
| $P(\neg i, a   l, +d)$     | 0        | 0'99584  | 0'00200  | 0       | 0'76409  | 0'00153 |
| $P(+i, a   l, \neg d)$     | 0'00217  | 0        | 0        | 0'23438 | 0        | 0       |
| $P(\neg i, a   l, \neg d)$ | 0'99783  | 0        | 0        | 0'76563 | 0        | 0       |

La probabilidad del nodo  $A$  en el nuevo diagrama de influencia es

$$P(a | l, d) = \sum_i P(i, a | l, d),$$



la misma que habíamos calculado mediante la ecuación 11, y la probabilidad de  $I$  es

$$P(i | l, a, d) = \sum_i P(i, a | l, d) / P(a | l, d),$$

que coincide con la obtenida mediante la ecuación 3; puede comprobarlo en el archivo Excel adjunto. Observe que las variables que aparecen en estas tablas se corresponden con la estructura del grafo (cf. fig. 2), al igual que la utilidad esperada:

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a \max_r \sum_i P(l) \cdot P(a | l, d) \cdot P(i | l, a, d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CR}(r) + u_{CI}(i, r)]. \quad (20)$$

### Paso 3. Eliminación del nodo $I$

Ahora que  $I$  es un sumidero, podemos eliminarlo. El grafo debe contener un enlace desde cada uno de sus padres hasta los nodos de utilidad correspondientes, es decir, debemos añadir los enlaces  $L \rightarrow CI$ ,  $D \rightarrow CI$  y  $A \rightarrow CI$ . La tabla del nodo  $CI$  se calcula con la ecuación 4, exactamente igual que en el método de eliminación de variables. La expresión para la utilidad esperada,

$$UE = \sum_l \max_d \sum_a \max_r P(l) \cdot P(a | l, d) \cdot [u_{CD}(d) + u_{CR}(r) + P(i, l, a | d)], \quad (21)$$

sólo se diferencia de la ecuación 5 en que tiene dos tablas de probabilidad,  $P(l)$  y  $P(a | l, d)$ , en vez de una,  $P(a, l | d)$ .

### Últimos pasos

A partir de este punto ya no hay que invertir ningún enlace ni crear enlaces nuevos, y los pasos que faltan coinciden punto por punto con el método de eliminación de variables: para eliminar la decisión  $R$  primero se suman los nodos de utilidad  $CI$  y  $CR$  (ecuación 6) y luego se calcula la utilidad  $u_{CIR}(l, a, d)$  con la ecuación 7; al eliminar  $A$  la utilidad del nodo  $CIR$  se obtiene mediante la ecuación 12, luego se suman los dos nodos de utilidad (ecuación 15), se elimina  $D$  (ecuación 16) y finalmente se elimina  $L$  (ecuación 18).

## Apéndice: Comparación de los dos algoritmos

La principal diferencia entre estos dos algoritmos es que el de inversión de arcos opera sobre el diagrama de influencia, transformándolo en cada paso hasta que sólo queda un nodo de utilidad, cuya tabla de utilidad no depende de ninguna variable y por tanto sólo contiene un valor numérico, que es la utilidad esperada. En cambio, el método de eliminación de variables sólo trabaja con los potenciales, prescindiendo del grafo.

Como consecuencia de esto, el algoritmo de eliminación de variables a veces almacena probabilidades conjuntas, mientras que el de inversión de arcos siempre mantiene para cada nodo de azar una tabla con una única variable condicionada: la variable representada por el nodo. Por ejemplo, al eliminar la variable  $I$  el primer algoritmo se queda con la probabilidad  $P(l, a | d)$  —cf. ecuación 5— mientras que el segundo mantiene dos tablas de probabilidad,  $P(l)$  y  $P(a | l, d)$ , como puede verse en la ecuación 21. Para llegar a ese punto la eliminación de variables ha sido más eficiente, pues ha calculado  $P(i | l, a, d)$  y  $P(l, a | d)$  con menos operaciones que las necesarias para invertir primero el enlace  $I \rightarrow L$  y luego  $I \rightarrow A$ . Sin embargo, al eliminar la variable  $A$  el primer algoritmo obtiene la tabla  $P(l | d)$ , que aparentemente depende de la decisión  $D$ , cuando en realidad no es así; por eso es necesario proyectar este potencial (ecuación 14). En cambio, el método de inversión de arcos, al mantener por separado  $P(l)$  y  $P(a | d, l)$ , puede eliminar  $A$  sin establecer una relación espuria entre  $L$  y  $D$ , y por eso evita tener que hacer la proyección. Por tanto, lo que un método ahorra por un lado lo pierde por otro, de modo que resulta difícil saber cuál de los dos es más eficiente. En cualquier caso, comprobamos que, salvo estas pequeñas diferencias, los dos métodos realizan esencialmente las mismas operaciones.

En otros problemas más complejos sí podría haber diferencia entre ambos algoritmos. Por ejemplo, supongamos que añadiéramos a nuestro diagrama de influencia una variable  $X$  y los

enlaces  $I \rightarrow X$  y  $X \rightarrow CI$ . El método de inversión de arcos eliminaría  $X$  antes que  $I$  por ser un sumidero, mientras que el método de eliminación de variables puede eliminar estas dos variables en cualquier orden. Aparentemente esta mayor libertad podría hacer que el método de eliminación de variables fuera más eficiente. Sin embargo, se demostró empíricamente que la inversión de arcos, al seguir el orden impuesto (al menos parcialmente, en general) por el grafo, suele encontrar mejores órdenes de eliminación [6].

Una posibilidad de combinar las ventajas de ambos métodos es utilizar un grafo moral y una heurística para encontrar un orden de eliminación óptimo o cercano al óptimo; el grafo moral se obtiene eliminando los arcos de información (los que llegan a los nodos de decisión), «casando» después los padres de cada nodo y quitando la dirección de los enlaces [1, 4]. Así es como Open-Markov implementa el método de eliminación de variables, tanto para redes bayesianas como para diagramas de influencia.

## Referencias

- [1] R. G. Cowell, A. P. Dawid, S. L. Lauritzen, and D. J. Spiegelhalter. *Probabilistic Networks and Expert Systems*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] F. J. Díez. *Introducción a los Modelos Gráficos Probabilistas*. UNED, Madrid, 2007.
- [3] R. A. Howard and J. E. Matheson. Influence diagrams. In R. A. Howard and J. E. Matheson, editors, *Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis*, pages 719–762. Strategic Decisions Group, Menlo Park, CA, 1984.
- [4] F. Jensen, F. V. Jensen, and S. L. Dittmer. From influence diagrams to junction trees. In R. L. de Mantaras and D. Poole, editors, *Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'94)*, pages 367–373, San Francisco, CA, 1994. Morgan Kaufmann.
- [5] F. V. Jensen and T. D. Nielsen. *Bayesian Networks and Decision Graphs*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2007.
- [6] M. Luque and F. J. Díez. Variable elimination for influence diagrams with super-value nodes. *International Journal of Approximate Reasoning*, 51:615–631, 2010.
- [7] S. M. Olmsted. *On Representing and Solving Decision Problems*. PhD thesis, Dept. Engineering-Economic Systems, Stanford University, CA, 1983.
- [8] R. D. Shachter. Evaluating influence diagrams. *Operations Research*, 34:871–882, 1986.