Curso de Experto Universitario en

Probabilidad y Estadística en Medicina

www.ia.uned.es/cursos/prob-estad

Teorema de Bayes en medicina

F. J. Díez Vegas

Dpto. Inteligencia Artificial. UNED

fjdiez@dia.uned.es

www.ia.uned.es/~fjdiez

Teorema de Bayes

- Sabíamos que

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$ por la definición de $P(x|y)$

$$P(x,y) = P(x) \cdot P(y \mid x)$$ por la definición de $P(y|x)$

$$P(y) = \sum_x P(y|x) \cdot P(x)$$ por el teorema de la prob. total

- Combinando estos resultados

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{P(x) \cdot P(y|x)}{P(y)} = \frac{P(x) \cdot P(y|x)}{\sum_{x'} P(x') \cdot P(y|x')}$$

- Es decir, conociendo $P(x)$ y $P(y|x)$ calculamos $P(x|y)$

Teorema de Bayes. Ejemplo

- La enfermedad pediátrica *A* tiene una prevalencia del 3%.
- El 80% de las personas adultas que padecieron *A* en su infancia desarrollan la enfermedad *B.*
- Solamente el 1% de las personas que **no** padecieron *A* en su infancia desarrollan *B*.
- Tenemos un paciente que presenta la enfermedad *B*. ¿Cuál es la probabilidad de que padeciera *A* en su infancia?
- Solución:

$$\begin{aligned} P(+b) &= P(+b|+a)\cdot P(+a) + P(+b|\neg a)\cdot P(\neg a) \\ &= 0'80\cdot 0'03 + 0'01\cdot 0'97 = 0'024 + 0'0097 = 0'0337 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(+a|+b) &= \frac{P(+a)\cdot P(+b|+a)}{P(+b)} \\ &= \frac{0'03\cdot 0'8}{0'0337} = 0'7122 \end{aligned}$$

Conceptos básicos en medicina

Enfermedad *E*, hallazgo *H*

- Prevalencia: $P(+e)$
- Sensibilidad: $P(+h|+e)$
- Especificidad: $P(\neg h|\neg e)$
- Incidencia absoluta

  = nuevos casos / período de tiempo
- Incidencia relativa

  = nuevos casos / (período de tiempo × nº habitantes)

  Ejemplo: 13'73 casos de IAM / año × 10.000 habitantes

➨ En situaciones estables:

Valor predictivo de un hallazgo

- Valor predictivo positivo: $P(+e|+h)$

$$P(+e|+h) = \frac{P(+e)\cdot P(+h|+e)}{P(+e)\cdot P(+h|+e) + P(\neg e)\cdot P(+h|\neg e)}$$

$$\boxed{\mathrm{VPP} = \frac{\mathrm{Prev}\cdot \mathrm{Sens}}{\mathrm{Prev}\cdot \mathrm{Sens} + (1-\mathrm{Prev})\cdot(1-\mathrm{Espec})}}$$

- Valor predictivo negativo: $P(\neg e|\neg h)$

$$P(\neg e|\neg h) = \frac{P(\neg e)\cdot P(\neg h|\neg e)}{P(+e)\cdot P(\neg h|+e) + P(\neg e)\cdot P(\neg h|\neg e)}$$

$$\boxed{\mathrm{VPN} = \frac{(1-\mathrm{Prev})\cdot \mathrm{Espec}}{\mathrm{Prev}\cdot(1-\mathrm{Sens}) + (1-\mathrm{Prev})\cdot \mathrm{Espec}}}$$

Ejemplo

Prev	Sens	Espec	Vpp	Vpn
0’01	0’99	0’99	0’5	0’9999
0’08	0’99	0’99	**0’84**	**0’9995**
0’01	**0’999**	0’99	0’502	**0’99999**
0’01	0’99	**0’999**	**0’9**	0’9999

Advertencia

- ¡Mucho cuidado al hablar de la fiabilidad de un test!
- Ejemplo:
  - La **prevalencia** de *X* es el 1‰ $\rightarrow$ $P(+x) = 0'001$
  - La **sensibilidad** de *Y* es el 98% $\rightarrow$ $P(+y|+x) = 0'98$
  - La **especificidad** de *Y* es el 96% $\rightarrow$ $P(\neg y|\neg x) = 0'96$
  - Por tanto, la **fiabilidad** de *Y* es:

$$\begin{aligned} F &= P(+x,+y) + P(\neg x,\neg y) \\ &= P(+y|+x) \cdot P(+x) + P(\neg y|\neg x) \cdot P(\neg x) \\ &= 0'98 \cdot 0'001 + 0'96 \cdot 0'999 = 0'96002 \end{aligned}$$

  - Es decir, la prueba *Y* determina el valor correcto de *X* en el 96% de los casos.
  - Sin embargo, un resultado positivo en *Y* **no significa** que el paciente tenga un 96% de probabilidad de padecer *X.*
  - De hecho, Vpp = $P(+x|+y) = 0'024 = 2'4\% \neq 96\%$

Forma racional del teorema de Bayes

$$\left.\begin{aligned} P(+e|h) &= \frac{P(+e)\cdot P(h|+e)}{P(+e)\cdot P(h|+e) + P(\neg e)\cdot P(h|\neg e)} \\ P(\neg e|h) &= \frac{P(\neg e)\cdot P(h|\neg e)}{P(+e)\cdot P(h|+e) + P(\neg e)\cdot P(h|\neg e)} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P(+e|h)}{P(\neg e|h)} = \frac{P(+e)}{P(\neg e)} \cdot \frac{P(h|+e)}{P(h|\neg e)}$$

$$RP_{pre} \equiv \frac{P(+e)}{P(\neg e)} \qquad RP_{post} \equiv \frac{P(+e|h)}{P(\neg e|h)} \qquad RV \equiv \frac{P(h|+e)}{P(h|\neg e)}$$

RP = Razón de probabilidad (“odds”)
RV = Razón de verosimilitud (“likelihood ratio”)

$$\boxed{RP_{post} = RP_{pre} \cdot RV}$$

Ejemplo

$$P(+e) = 0'03 \quad \Rightarrow \quad RP_{pre} = \frac{0'03}{1 - 0'03} = 0'0309$$

$$RP_{post} = RP_{pre} \cdot RV \qquad\qquad P(+e|h) = \frac{RP_{post}}{1 + RP_{post}}$$

h	$P(h\|+e)$	$P(h\|\neg e)$	RV	RP_{post}	$P(+e\|h)$
severo	0’35	0’01	35	1’0825	0’5198
moderado	0’45	0’03	15	0’4640	0’3169
leve	0’16	0’16	1	0’0309	0’0300
ausente	0’04	0’80	0’05	0’0015	0’0015

$$P(+e|h) = \frac{P(+e) \cdot P(h|+e)}{P(+e) \cdot P(h|+e) + (1 - P(+e)) \cdot P(h|\neg e)}$$