Curso de Experto Universitario en

Probabilidad y Estadística en Medicina

www.ia.uned.es/cursos/prob-estad

Introducción a la probabilidad

F. J. Díez Vegas

Dpto. Inteligencia Artificial. UNED

fjdiez@dia.uned.es

www.ia.uned.es/~fjdiez

Variables aleatorias

- Variable aleatoria *X*
  - toma valores que, a priori, no conocemos con certeza
  - los valores han de ser exclusivos y exhaustivos
- Ejemplo 1
  - Variable: edad
  - Valores: 1 año, 2 años, 3 años…
  - Valores: menor de 18, de 18 a 65, mayor de 65
- Ejemplo 2
  - Variable: estenosis mitral
  - Valores: 1 mm^2, 2 mm^2 , 3 mm^2 , 4 mm^2
  - Valores: estenosis ausente, leve, moderada, severa

Concepto de probabilidad

- $P(x)$ puede interpretarse como $P(X=x)$
- Modos de asignar la probabilidad
  - Suponiendo que los valores son equiprobables
    - Ejemplo: P(varón) = P(mujer) = 1/2
  - Mediante estudios estadísticos
    - Ejemplo: P(varón) = 246 / 500 = 0’492
      P(mujer) = 254 / 500 = 0’508
    - Ejemplo: P(menor 18 años) = 135 / 500 = 0’270
      P(entre 18 y 65) = 248 / 500 = 0’496
      P(mayor 65 años) = 117 / 500 = 0’234
    - Ejemplo: P(estenosis mitral) = 0’02
      P(infarto miocardio) = 0’005

¡Mucho cuidado al definir las variables!

Probabilidades conjuntas y marginales

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1=x_1 \text{ y } X_2=x_2 \text{ y } \ldots \text{ y } X_n=x_n)$$

N	varón	mujer	TOTAL
<18	67	68	135
18-65	122	126	248
> 65	57	60	117
TOTAL	246	254	500

P	varón	mujer	TOTAL
<18	0’134	0’136	0’270
18-65	0’244	0’252	0’496
> 65	0’114	0’120	0’234
TOTAL	0’492	0’508	1’000

Suma de probabilidades

$$\sum_x P(x) = 1$$

$$\sum_y P(y) = 1$$

$$P(x) = \sum_y P(x,y)$$

$$P(y) = \sum_x P(x,y)$$

$$\sum_x \sum_y P(x,y) = \sum_x P(x) = 1$$

$$\sum_y \sum_x P(x,y) = \sum_y P(y) = 1$$

Probabilidad condicional

- Definición

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

- Interpretación

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} = \frac{N(x,y)/N}{N(y)/N} = \frac{N(x,y)}{N(y)}$$

- Ejemplo

$$P(\text{varón}|{>}65) = \frac{P(\text{varón}, {>}65)}{P({>}65)} = \frac{N(\text{varón}, {>}65)}{N({>}65)} = \frac{57}{117} = 0'487$$

$$P(\text{mujer}|{>}65) = \frac{P(\text{mujer}, {>}65)}{P({>}65)} = \frac{N(\text{mujer}, {>}65)}{N({>}65)} = \frac{60}{117} = 0'513$$

Teorema de la probabilidad total

Por la definición de probabilidad condicional:

$$P(x,y) = P(x|y) \cdot P(y)$$

Por tanto,

$$P(x) = \sum_y P(x,y) = \sum_y P(x|y) \cdot P(y)$$

Ejemplo:

$$P(>65) = P(>65|\text{varón}) \cdot P(\text{varón}) + P(>65|\text{mujer}) \cdot P(\text{mujer})$$

$$0'2340 = 0'2317 \cdot 0'492 + 0'2362 \cdot 0'508$$